

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Проректор по учебной работе и  
довузовской подготовке**

**А.А. Воронов**

|                            |  |
|----------------------------|--|
|                            | <b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>   |
| <b>по дисциплине:</b>      | Вычислительная математика  |
| <b>по направлению:</b>     | Прикладные математика и физика   |
| <b>профиль подготовки:</b> | Радиотехника и компьютерные технологии<br>Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий<br>кафедра вычислительной физики |
| <b>курс:</b>               | 3  |
| <b>квалификация:</b>       | бакалавр   |

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет

6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 60 час.

Самостоятельная работа: 150 час.

Всего часов: 270, всего зач. ед.: 6

Количество контрольных работ, заданий: 8

Программу составил: И.Б. Петров, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры вычислительной физики 28.05.2020

## Аннотация

В программу данного курса включены основные разделы вычислительной математики: теория погрешностей, теория аппроксимации функций, введение в методы машинного обучения, численные методы решения линейных и нелинейных систем уравнений, численное интегрирование, численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

В ходе изучения курса студент будет иметь следующие компетенции:

- знания основных вычислительных методов, применяемых для аппроксимации функций, решения линейных и нелинейных систем уравнений, дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), численного интегрирования;
- умение применять численные методы для решения конкретных вычислительных задач;
- умение исследовать вычислительные методы на сходимость, аппроксимацию, устойчивость;
- умение строить вычислительные алгоритмы для решения конкретных задач с помощью компьютера;
- умение решать корректно поставленные задачи с помощью компьютера;
- умение анализировать полученные численные решения;
- умение работать с онлайн и интернет учебными ресурсами.

Все указанные компетенции реализуются и проверяются в ходе

учебного процесса с использованием лекций, семинаров, лабораторных работ, заданий, контрольных работ, зачетов, онлайн ресурсов.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Сформировать у студентов систематическое представление о:

- 1) методах приближенного решения наиболее распространенных базовых типов математических задач;
- 2) источниках погрешностей и методах их оценки;
- 3) методах решения актуальных прикладных задач.

### Задачи дисциплины

- 1) Освоение материала охватывающего основные задачи и методы вычислительной математики.
- 2) Формирование целостного представления о численных методах решения современных научных прикладных задач.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции   | Индикаторы достижения компетенции   |
|--|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач                                      | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи                           |
|  | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи |
|  | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки            |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения                              |
|  | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки               |
|  | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов                                   |
| ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в избранной предметной области                           | ПК-3.1 Знает принципы работы и диапазоны рабочих параметров используемого научного оборудования           |

## 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Область применения, теоретические основы, основные принципы, особенности и современные тенденции развития методов вычислительной математики.

уметь:

Применять методы численного анализа для приближенного решения задач в области своей научно-исследовательской работы.

владеть:

Программными средствами разработки вычислительных алгоритмов и программ, способами их отладки, тестирования и практической проверки соответствия реализованного алгоритма теоретическим оценкам.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| №  | Тема (раздел) дисциплины  | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. |          |                 |                |
|----|---|---|----------|-----------------|----------------|
|    |   | Лекции  | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1  | Методы численного решения уравнений и систем нелинейных уравнений   | 4   |          | 4               | 9              |
| 2  | Предмет вычислительной математики   | 4   |          | 2               | 2              |
| 3  | Приближение функций, заданных на дискретном множестве   | 4   |          | 4               | 10             |
| 4  | Решение систем линейных алгебраических уравнений  | 6   |          | 4               | 10             |
| 5  | Численное дифференцирование   | 4   |          | 4               | 10             |
| 6  | Численное интегрирование  | 2   |          | 4               | 10             |
| 7  | Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)  | 4   |          | 6               | 12             |
| 8  | Анализ сигналов   | 2   |          | 2               | 12             |
| 9  | Вариационно- и проекционно-разностные методы построения разностных схем. Метод конечных элементов.                                  | 4   |          | 6               | 10             |
| 10 | Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа  | 4   |          | 4               | 10             |
| 11 | Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений  | 4   |          | 4               | 10             |
| 12 | Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных                                    | 6   |          | 4               | 10             |
| 13 | Численное решение краевых задач для ОДУ   | 4   |          | 2               | 10             |
| 14 | Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения. | 4   |          | 4               | 10             |

|                       |  |                     |  |    |     |
|-----------------------|--|---------------------|--|----|-----|
| 15                    | Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа | 2                   |  | 4  | 10  |
| 16                    | Понятие о пакете OpenFoam  | 2                   |  | 2  | 5   |
| Итого часов           |  | 60                  |  | 60 | 150 |
| Подготовка к экзамену |  | 0 час.              |  |    |     |
| Общая трудоёмкость    |  | 270 час., 6 зач.ед. |  |    |     |

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

##### Семестр: 5 (Осенний)

#### 1. Методы численного решения уравнений и систем нелинейных уравнений

Локализация корней. Принцип сжимающих отображений. Метод простых итераций.

Условие сходимости метода простых итераций. Метод Ньютона.

Порядок сходимости и условия достижения заданной точности итерационных методов.

\*Теорема о квадратичной сходимости метода Ньютона. \*Модифицированный метод Ньютона.

#### 2. Предмет вычислительной математики

Примеры актуальных физических задач, при решении которых применяются численные методы: проблемы управляемого, инерциального термоядерного синтеза; задачи возникновения и развития гидродинамических неустойчивостей, переход к турбулентным течениям; взаимодействие лазерного излучения с веществом; задачи высокоскоростного удара образцов с возмущёнными поверхностями. Специфика машинных вычислений. Элементарная теория погрешностей.

#### 3. Приближение функций, заданных на дискретном множестве

Задача алгебраической интерполяции. Существование и единственность алгебраического интерполяционного полинома.

Интерполяционный полином в форме Лагранжа и в форме Ньютона. Остаточный член интерполяции.

Интерполяция по чебышёвским узлам. Оценка погрешности интерполяции для функций, заданных с ошибками.

Кусочно-многочленная интерполяция. Интерполяция сплайнами. \*Локальные сплайны.

\*Сплайны с финитным носителем (B-сплайны). \*Тригонометрическая интерполяция.

#### 4. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Нормы в конечномерных пространствах. Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений.

Прямые методы решения: метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки для систем специального вида.

Итерационные методы решения линейных систем. Метод простых итераций.

Необходимое, достаточное условия сходимости метода простых итераций. Метод Зейделя.

\*Каноническая форма записи двухслойного итерационного метода.

\*Чебышёвские итерационные методы. \*Метод сопряженных градиентов.

\*Проблема поиска собственных значений матрицы. \*Степенной метод.

\*Метод вращений для поиска собственных значений самосопряженной матрицы.

Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений.

#### 5. Численное дифференцирование

Простейшие формулы численного дифференцирования. Оценка погрешности.

## 6. Численное интегрирование

Квадратурные формулы Ньютона–Котеса (прямоугольников, трапеций, Симпсона) и оценка их погрешности. Квадратурные формулы Гаусса.

Методы вычисления несобственных интегралов.

## 7. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о связи аппроксимации, устойчивости, сходимости.

Простейшие численные методы решения задачи Коши для ОДУ. Методы Рунге–Кутты для ОДУ. Оценки погрешности и управление длиной шага при численном интегрировании систем ОДУ. Линейные многошаговые методы (типа Адамса) решения ОДУ.

## 8. Анализ сигналов

Основные вычислительные методы анализа сигналов. Вейвлеты.

## Семестр: 6 (Весенний)

9. Вариационно- и проекционно-разностные методы построения разностных схем. Метод конечных элементов.

Вариационно- и проекционно-разностные методы построения разностных схем. Метод конечных элементов.

10. Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа

Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа.

Разностные схемы для решения многомерных уравнений теплопроводности. Понятие о методах расщепления. Метод переменных направлений. \*Разностные схемы для квазилинейного уравнения теплопроводности. \*Консервативные разностные схемы.

11. Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). \* Численное решение ЖС ОДУ. А-устойчивые,  $A(\alpha)$ -устойчивые и L-устойчивые схемы. \*Анализ двухточечных схем (Рунге–Кутты), линейных многошаговых схем в про-странстве неопределенных коэффициентов. \*Одноитерационные методы Розенброка.

12. Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных

Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных.

Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Приемы исследования разностных задач на устойчивость.

Принцип максимума, спектральный признак устойчивости, принцип замороженных коэффициентов.

13. Численное решение краевых задач для ОДУ

Методы решения линейных краевых задач (метод численного построения общего решения, конечно-разностный метод для линейного уравнения второго порядка, метод прогонки). Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации). Задача на собственные значения. Задача Штурма—Лиувилля.\* Понятие жесткой краевой задачи. \*Методы решения жесткой линейной краевой задачи.

14. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения.

Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Разностные схемы для характеристической формы записи системы.

15. Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа

Разностная схема «крест» для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона. Итерационные методы для численного решения возникающих систем линейных уравнений. Принцип установления для решения стационарных задач. Условия сходимости.

16. Понятие о пакете OpenFoam

Решение типовых задач в пакете OpenFoam

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная персональными компьютерами, мультимедиапроектором и экраном.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Введение в вычислительную математику [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. С. Рябенский .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2008 .— 288 с.
2. Введение в вычислительную физику [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Р. П. Федоренко ; под ред. А. И. Лобанова .— 2-е изд., испр. и доп. — Долгопрудный : Интеллект, 2008 .— 504 с.
3. 12 лекций по вычислительной математике : вводный курс [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. И. Косарев .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматкнига, 2013 .— 240 с.
4. Лекции по вычислительной математике [Текст] : учеб. пособие для вузов / И. Б. Петров, А. И. Лобанов .— М. : Интернет-Ун-т Информ. Технологий : БИНОМ. Лаб. знаний, 2006, 2010, 2013 .— 523 с.
5. Численные методы [Текст] : в 2 кн. : учебник для вузов / Н. Н. Калиткин, Е. А. Альшина .— М. : Академия, 2013 .— (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика) .— Кн. 1 : Численный анализ. - 2013. - 304 с.
6. Численные методы [Текст] : в 2 кн. : учебник для вузов / Н. Н. Калиткин, П. В. Корякин .— М. : Академия, 2013 .— (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика) .— Кн. 2 : Методы математической физики. - 2013. - 304 с.

### **Дополнительная литература**

Фонд литературы базовой кафедры

1. Лабораторный практикум «Основы вычислительной математики». — 2-е изд. исп. и дополн. / Иванов В.Д., Косарев В.И., Лобанов А.И., Петров И.Б., Пирогов В.Б., Рябенский В.С., Старожилова Т.К., Тормасов А.Г., Утюжников С.В., Холодов А.С. — М.: Изд-во МЗ пресс, 2003, 196 с.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990., 512 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

[http://mipt.ru/education/chair/computational\\_mathematics/study/materials/compmath/](http://mipt.ru/education/chair/computational_mathematics/study/materials/compmath/)

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Компиляторы и среды разработки C++, JAVA, FORTRAN, PYTHON

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий курс должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса отведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания,
- подготовку к практическим занятиям и зачетам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать теоретические и практические задачи.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания, ощутить взаимосвязь между темами курса.

При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

|                            |  |
|----------------------------|--|
| <b>по направлению:</b>     | Прикладные математика и физика   |
| <b>профиль подготовки:</b> | Радиотехника и компьютерные технологии<br>Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий<br>кафедра вычислительной физики |
| <b>курс:</b>               | <u>3</u>   |
| <b>квалификация:</b>       | бакалавр   |

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 5 (осенний) - Дифференцированный зачет
- 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** И.Б. Петров, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой



## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции   | Индикаторы достижения компетенции   |
|--|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач                                      | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи                           |
|  | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи |
|  | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки            |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения                              |
|  | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки               |
|  | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов                                   |
| ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в избранной предметной области                           | ПК-3.1 Знает принципы работы и диапазоны рабочих параметров используемого научного оборудования           |

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Вычислительная математика» обучающийся должен:

### знать:

Область применения, теоретические основы, основные принципы, особенности и современные тенденции развития методов вычислительной математики.

### уметь:

Применять методы численного анализа для приближенного решения задач в области своей научно-исследовательской работы.

### владеть:

Программными средствами разработки вычислительных алгоритмов и программ, способами их отладки, тестирования и практической проверки соответствия реализованного алгоритма теоретическим оценкам.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

см. файл

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

см. файл

Критерии оценивания

см. файл

## 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

см. файл